

8. cvičení - teorie

Definice. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky se definuje limita zleva a zprava (namísto $P(c, \delta)$ se uvažuje levé/pravé prstencové okolí). Limitu zprava značíme $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$, zleva pak $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$.

Fakt. Funkce f má limitu v bodě c právě tehdy, když obě jednostranné limity v tom bodě existují a rovnají se.

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Fakt. Polynom je spojitá funkce.

Věta 3.3 (VoAL). Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pro $g \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí c ,

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3.4 ($\frac{\pm}{0+}$). Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ a existuje $\eta > 0$ t.ž. $g > 0$ na $P(c, \eta)$. Pak $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Věta 3.6 (Limita složené funkce). Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Nechť platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek:

- (P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,
- (S) f je spojitá v D .

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

Věta (Heine). Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$. Pak pro reálnou funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z definičního oboru funkce f t.ž. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Známé limity

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Další užitečné limity odvozené ze známých limit:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arccotg}(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x)\right) = 2/\pi$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Co se může hodit:

- $a^y = e^{y \log(a)}$ - trik na počítání limitu typu „něco na něco“, kde je x v základu i exponentu.
- Nechť $x > 0$, pak $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$
- $\sin x - \sin a = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$